PLAN DE RECUPERACIÓN DE MATEMÁTICAS
3º ESO (Tercer Trimestre)

(Para alumnos de 4º de ESO)

NOMBRE:____

Para aprobar las matemáticas pendientes de cursos anteriores es **obligatorio** realizar el plan de recuperación correspondiente teniendo en cuenta lo siguiente:

- El plan de recuperación correspondiente al primer trimestre tendrá como fecha límite de entrega (no prorrogable) **el jueves 09 de Junio.**
- Deberá estar trabajado de principio a fin.
- Deberá estar hecho a lápiz.
- Deberá estar hecho de forma clara, limpia y **legible**.

OBJETIVO 1

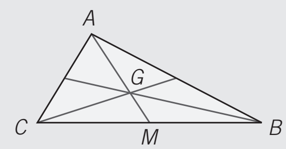
DETERMINAR LAS RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN TRIÁNGULOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

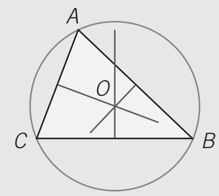
Las **medianas** de un triángulo son las rectas que unen cada uno de los vértices del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Las medianas se cortan en un punto que se llama **baricentro**.



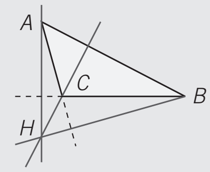
Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a los lados que pasan por su punto medio.

Las mediatrices se cortan en un punto que se llama **circuncentro**.



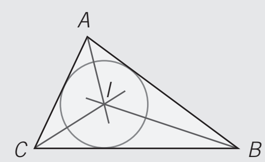
Las **alturas** de un triángulo son las rectas perpendiculares a cada lado que pasan por el vértice opuesto.

Las alturas se cortan en un punto que se llama **ortocentro**.

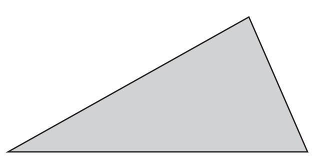


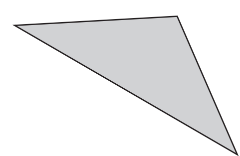
Las **bisectrices** de un triángulo son rectas que dividen cada ángulo en dos partes iguales.

Las bisectrices se cortan en un punto llamado **incentro**.

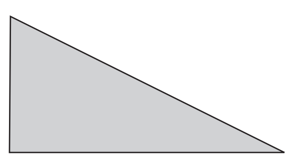


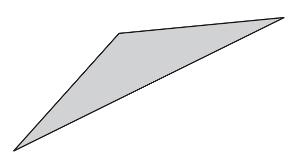
1 **Dibuja las medianas y el baricentro de los siguientes triángulos.**



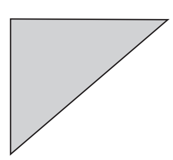


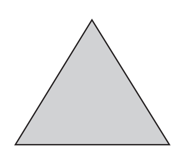
2 **Dibuja las mediatrices y el circuncentro de los triángulos.**



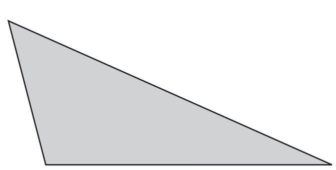


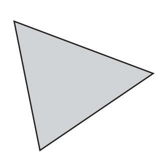
3 **Dibuja las alturas y el ortocentro de los triángulos.**





4 **Dibuja las bisectrices y el incentro de los siguientes triángulos.**



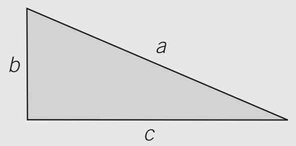


CONOCER Y APLICAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el lado de mayor longitud, opuesto al ángulo recto, se llama hipotenusa, y los otros dos lados se denominan catetos.



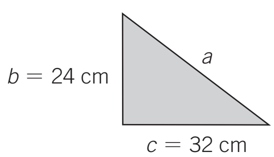
Hipotenusa → ***a***

Catetos ⟶ ***b, c***

El **teorema de Pitágoras** expresa que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

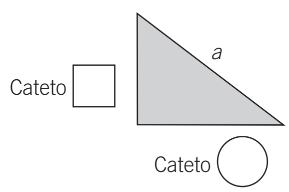
$$a^2 = b^2 + c^2$$

1 **Calcula el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 24 cm.**



$$a^2 = b^2 + c^2 = \square^2 + \square^2$$

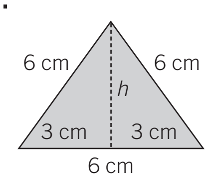
2 **Halla la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos se diferencian en 2 cm y el menor mide 6 cm.**



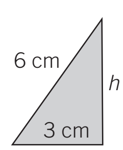
$$a^2 = \square + \bigcirc$$

3 **Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 6 cm.**

Para calcular el área tenemos que conocer la base, que en este caso mide 6 cm, y la altura, h, que hallamos con el teorema de Pitágoras.



Estudiamos este triángulo, que es rectángulo:



Aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos la altura, h:

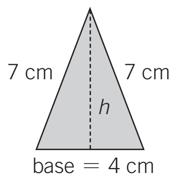
$$6^2 = 3^2 + h^2 \rightarrow h = \square$$

Calculamos el área aplicando la fórmula general: Área $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} =$

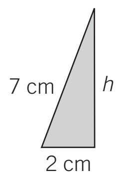
ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 **En un triángulo isósceles, los lados iguales miden 7 cm y el otro lado mide 4 cm. Calcula su área.**

Tomamos el lado desigual como base, $b = 4$ cm, y calculamos la altura, h, utilizando el teorema de Pitágoras.



Considerando esta parte del triángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos h.



$$7^2 = 2^2 + h^2$$

$$h = \boxed{}$$

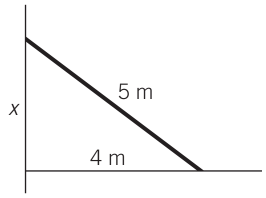
Calculamos el área aplicando la fórmula general: $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

Área =

5 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de los catetos mide 7,5 cm. Calcula la longitud del otro cateto.**

6 **El área de un triángulo rectángulo es 12 cm^2 y uno de los catetos mide 6 cm. Halla la longitud de la hipotenusa.**

7 **Una escalera de 5 metros de largo está apoyada en una pared, estando situada la base a 4 metros de la misma. ¿A qué altura llega la escalera?**

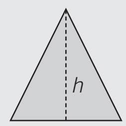


CALCULAR ÁREAS DE POLÍGONOS Y FIGURAS CIRCULARES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

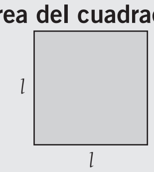
ÁREA DE POLÍGONOS

Área del triángulo



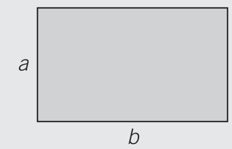
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Área del cuadrado



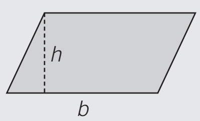
$$A = l \cdot l$$

Área del rectángulo



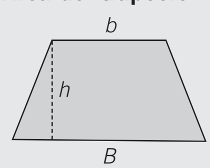
$$A = b \cdot a$$

Área del paralelogramo



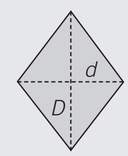
$$A = b \cdot h$$

Área del trapecio



$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$$

Área del rombo



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

1 **Calcula el área de los siguientes polígonos.**

a) Trapecio de bases 12 cm y 8 cm y altura 5 cm.
b) Rombo de diagonales 12 cm y 9 cm.
c) Rombo de diagonal mayor 8 cm y lado 5 cm.

ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

- Un **polígono** es **regular** cuando sus lados tienen la misma longitud y sus ángulos son iguales.
- El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por la apotema:

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

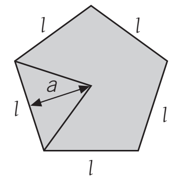
ÁREA DE UN POLÍGONO CUALQUIERA

Si no conocemos una fórmula para calcular el área de un polígono, su área se puede hallar descomponiéndolo en triángulos o figuras de áreas conocidas, calculando el área de cada una de esas figuras y sumando las áreas resultantes.

CALCULAR ÁREAS DE POLÍGONOS Y FIGURAS CIRCULARES

EJEMPLO

Calcula el área del siguiente pentágono regular.

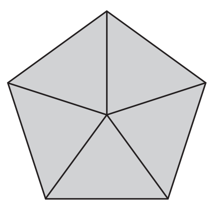


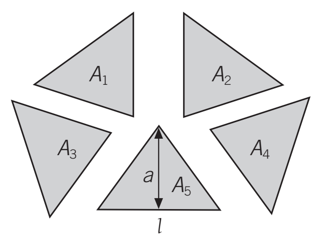
Lado: l

Perímetro: $P = l + l + l + l + l = 5l$

Apotema: a

Vemos que son cinco triángulos iguales: Área $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{l \cdot a}{2}$



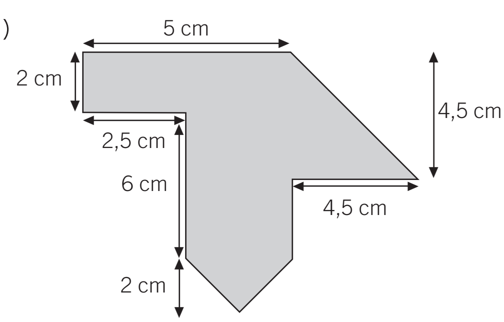


Área del pentágono $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

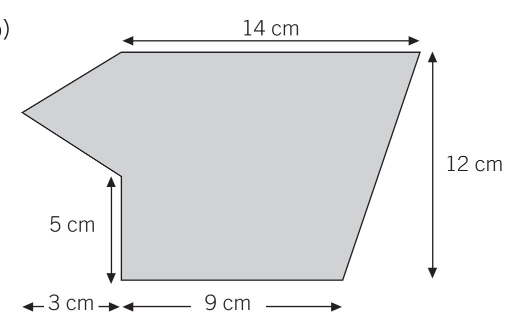
Área del pentágono $= \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} = \dfrac{5l \cdot a}{2} = \dfrac{P \cdot a}{2}$

2 **Calcula el área de las siguientes figuras.**

a)

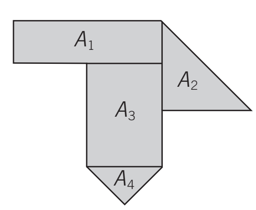


b)

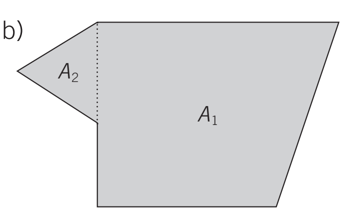


Lo primero que tenemos que hacer es dividir la superficie en polígonos de los que sepamos calcular su área.

a)



b)



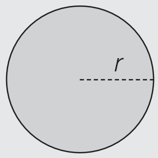
Calculamos el área total:

a) $A_1 =$ ☐
$A_2 =$ ☐
$A_3 =$ ☐
$A_4 =$ ☐
$\rightarrow A =$

b) $A_1 =$ ☐
$A_2 =$ ☐
$\rightarrow A =$

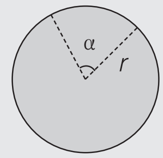
ÁREA DE FIGURAS CIRCULARES

Área del círculo



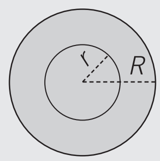
$$A = \pi \cdot r^2$$

Área del sector circular



$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$$

Área de la corona circular



$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

3 **Obtén el área de un círculo cuyo diámetro mide igual que el perímetro de un cuadrado de lado 7 cm.**

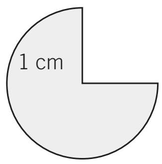
4 **Determina el área de un sector circular de amplitud un ángulo recto y cuyo radio es 10 cm.**

5 **Halla el área de una corona circular limitada por dos circunferencias de radios 2 cm y 1 cm.**

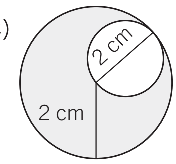
CALCULAR ÁREAS DE POLÍGONOS Y FIGURAS CIRCULARES

6 **Calcula el área de las siguientes figuras circulares.**

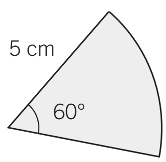
a)



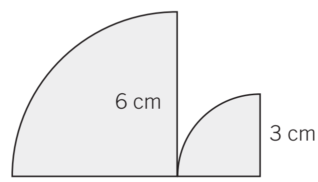
C)



b)

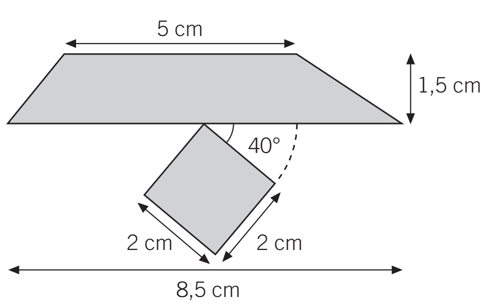


d)

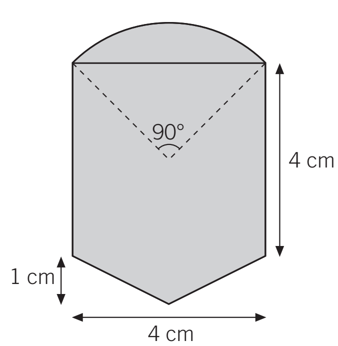


7 **Calcula el área de las siguientes figuras.**

a)



b)

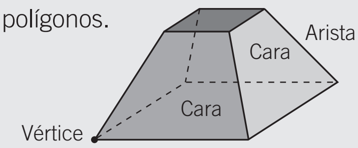


CLASIFICAR POLIEDROS

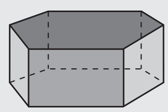
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

POLIEDROS

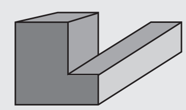
- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos.
  Los polígonos que limitan al poliedro se llaman **caras**.
  Los lados de las caras se denominan **aristas**.
  Los vértices de las caras se denominan **vértices**.



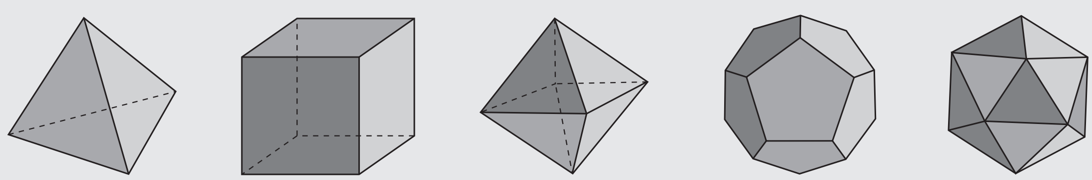
- **Poliedro convexo:** al prolongarse sus caras no cortan al poliedro.



- **Poliedro cóncavo:** al prolongarse sus caras, alguna de ellas corta al poliedro.



- **Poliedros regulares:** todas las caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se une el mismo número de caras.
  Solo existen cinco poliedros regulares:



Tetraedro **Cubo** **Octaedro** **Dodecaedro** **Icosaedro**

FÓRMULA DE EULER

En todo **poliedro convexo** se cumple siempre una relación, conocida con el nombre de fórmula de Euler, que relaciona el número de caras (C), el número de aristas (A) y el número de vértices (V):

$$\underbrace{C}_{\text{N.º de caras}} + \underbrace{V}_{\text{N.º de vértices}} = \underbrace{A}_{\text{N.º de aristas}} + 2$$

EJEMPLO

Comprueba que se cumple la fórmula de Euler para el tetraedro.

N.º de caras = 4 N.º de vértices = 4 N.º de aristas = 6

$C + V = A + 2 \rightarrow 4 + 4 = 6 + 2 \rightarrow 8 = 8$

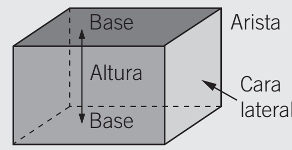
1 **Comprueba que el resto de poliedros regulares verifican la fórmula de Euler.**

POLIEDRO	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS	FÓRMULA DE EULER: $C + V = A + 2$
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

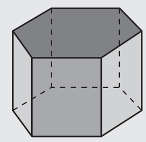
DIFERENCIAR LOS ELEMENTOS Y TIPOS DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

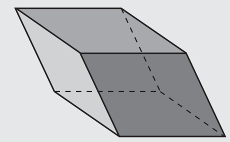
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

PRISMAS

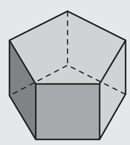


- Un **prisma** es un poliedro que tiene dos caras, que son polígonos iguales y paralelos entre sí, llamadas **bases**; sus otras **caras laterales** son paralelogramos.
- La **altura de un prisma** es la distancia entre las bases.
- **Prisma recto:** las caras laterales son todas rectángulos y, por tanto, perpendiculares a las bases.
- **Prisma oblicuo:** las caras laterales no son todas rectángulos.
- **Según la forma de la base**, los prismas se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales…

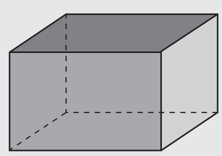

Prisma recto


Prisma oblicuo

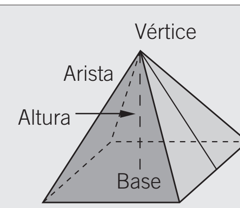
- **Prisma regular:** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.


Prisma pentagonal regular

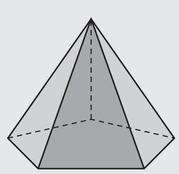
- **Paralelepípedos:** son los prismas cuyas bases son paralelogramos.
- **Ortoedro:** es un paralelepípedo recto.



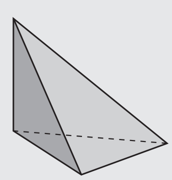
PIRÁMIDES



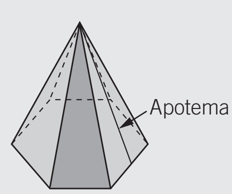
- Una **pirámide** es un poliedro cuya base es un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común, llamado **vértice de la pirámide**.
- La **altura de una pirámide** es la distancia de su vértice a la base.
- **Pirámide recta:** las caras laterales son todas triángulos isósceles.



- **Pirámide oblicua:** las caras laterales no son todas triángulos isósceles.



- **Según la forma de la base**, las pirámides se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales...
- **Pirámide regular:** es una pirámide cuya base es un polígono regular.
- **Apotema:** es la altura de cualquiera de las caras laterales de una pirámide regular.

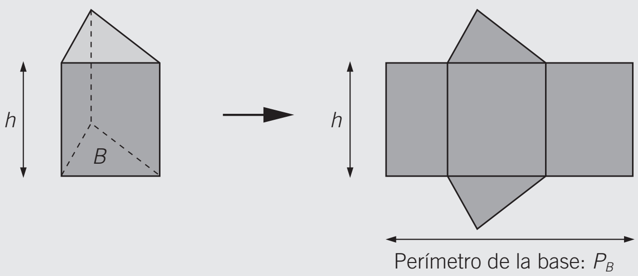


CALCULAR EL ÁREA DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ÁREA DE PRISMAS RECTOS

Para hallar el área de un prisma recto nos fijamos en su desarrollo, el prisma recto está formado por un rectángulo (sus caras laterales) y dos polígonos iguales que son sus bases.



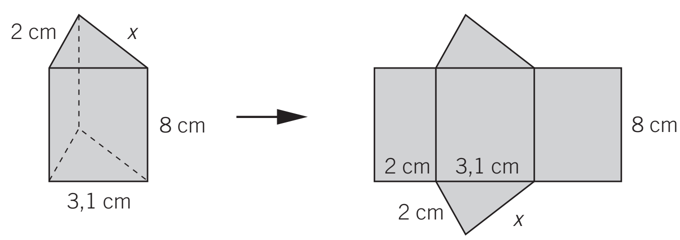
- **Área lateral:** es el área del rectángulo, uno de cuyos lados coincide con el perímetro de la base y el otro con la altura del prisma.

$$\boldsymbol{A_L = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = P_B \cdot h}$$

- **Área total:** es la suma del área lateral y el área de las bases.

$$\boldsymbol{A_T = \text{área lateral} + 2 \cdot \text{área de la base} = P_B \cdot h + 2 \cdot A_B}$$

1 **Dado este prisma recto con base un triángulo rectángulo, halla el área total.**

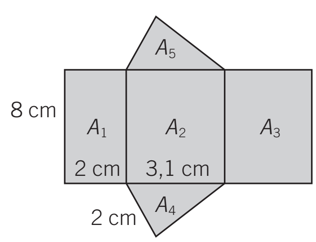


- Para hallar el valor de x, que es uno de los catetos del triángulo rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras:

  $(3,1)^2 = x^2 + 2^2$

  $x =$ ....

- Para calcular el área total determinamos el área de cada una de las seis caras del prisma, y luego las sumamos para obtener el área total:



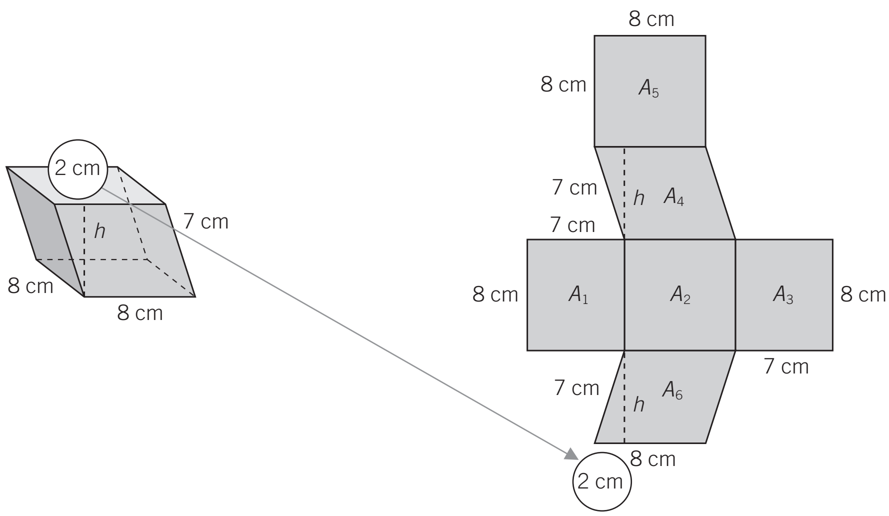
A_1, A_2, A_3 son rectángulos. Su área es el producto de base por altura.
A_4, A_5 son triángulos rectángulos. Su área es la base por la altura dividido entre 2, es decir, el producto de los catetos dividido entre 2.

$A_1 =$ $A_2 =$ $A_3 =$

$A_4 =$ $A_5 =$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 =$ $\boxed{}$

2 **Calcula el área del prisma oblicuo de base cuadrangular de la figura.**



- Para hallar el valor de h aplicamos el teorema de Pitágoras:

- Para calcular el área total determinamos el área de cada una de las seis caras del prisma, y luego las sumamos:

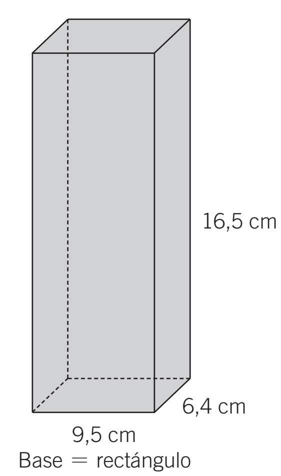
$A_1 = \square \cdot \square =$ $\qquad$ $A_4 = \square \cdot \square =$

$A_2 = \square \cdot \square =$ $\qquad$ $A_5 = \square \cdot \square =$

$A_3 = \square \cdot \square =$ $\qquad$ $A_6 = \square \cdot \square =$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 =$ $\boxed{}$

3 **Halla el área lateral y el área total de un ortoedro de 6,4 × 9,5 cm de base y 16,5 cm de altura.**



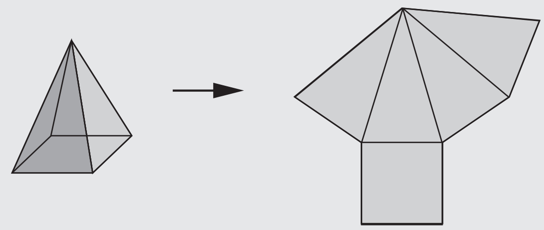
Área lateral = perímetro de la base · altura =

Área total = área lateral + 2 · área de la base =

CALCULAR EL ÁREA DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

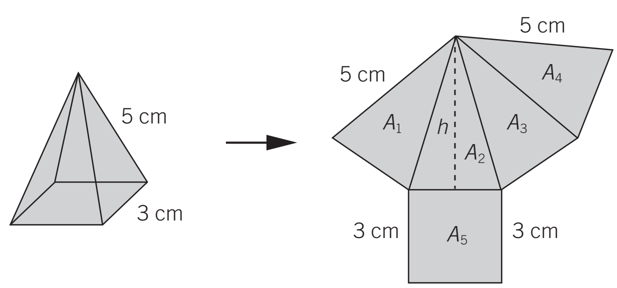
ÁREA DE PIRÁMIDES RECTAS

Para hallar el área de una pirámide recta nos fijamos en su desarrollo, está formada por la base y tantos triángulos como lados tiene la base.

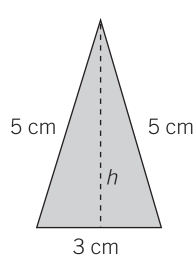


- **Área lateral:** es el área formada por la suma de las áreas de los triángulos.
- **Área total:** es la suma del área lateral y el área de la base: $\boldsymbol{A_T = A_L + A_B}$
- Si el polígono de la base es regular, el cálculo es más sencillo, ya que todas las caras laterales son iguales y basta con hallar el área de un triángulo y multiplicar por el número de triángulos para obtener el área lateral.

4 **Calcula el área de la pirámide de base cuadrada de la figura. Ten en cuenta que la base es un polígono regular.**



Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de h:



$$5^2 = \boxed{}^2 + h^2$$

$A_1 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} =$ $\qquad$ $A_2 =$ $\qquad$ $A_3 =$

$A_4 =$ $\qquad$ $A_5 =$

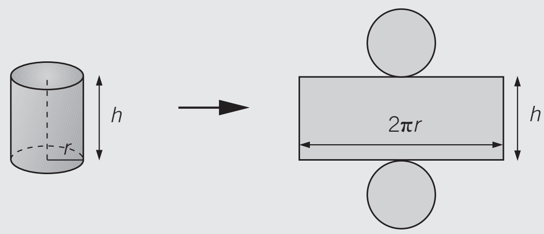
Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \boxed{}$

CALCULAR EL ÁREA DE CUERPOS REDONDOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ÁREA DEL CILINDRO

Para hallar el área del cilindro nos fijamos en su desarrollo, está formado por un rectángulo y dos círculos.



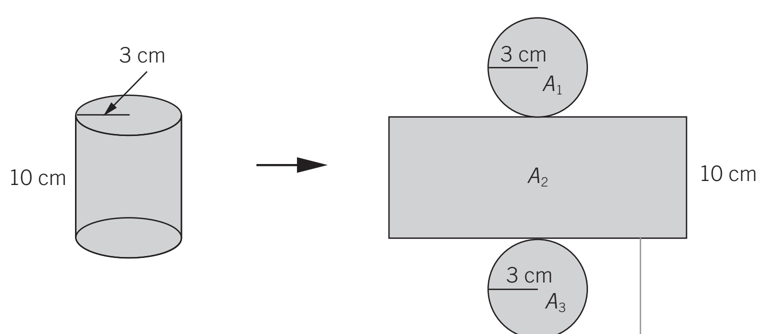
- **Área lateral:** es un rectángulo, en el que uno de sus lados es igual a la longitud de la circunferencia de la base ($2\pi r$), y el otro es la altura (h).

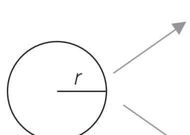
$$\boldsymbol{A_L = \text{longitud de la base} \cdot \text{altura} = 2\pi r \cdot h}$$

- **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y las áreas de las dos bases.

$$\boldsymbol{A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)}$$

1 **Completa el ejercicio y halla el área total del cilindro.**





Área $= \pi r^2 =$

Longitud $= 2\pi r =$

Es igual que la longitud de A_1.

$2 \cdot \pi \cdot 3 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3$

$A_1 = \pi r^2 =$

$A_2 = 2\pi r \cdot h =$

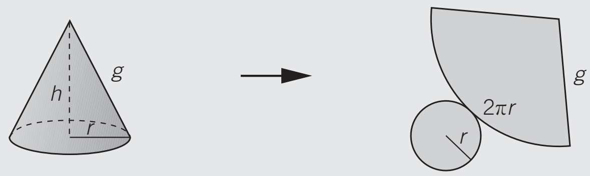
$A_3 = \pi r^2 =$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 =$ $\boxed{}$

CALCULAR EL ÁREA DE CUERPOS REDONDOS

ÁREA DEL CONO

Para hallar el área de un cono nos fijamos en su desarrollo, está formado por un sector circular y un círculo, que es la base.

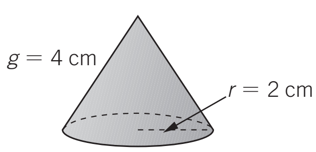


- **Área lateral:** es un sector circular de radio g cuyo arco mide $\frac{2\pi r}{2\pi g}$.

$$\boldsymbol{A_L = \pi g^2 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi g} = \pi r g}$$

- **Área total:** $\boldsymbol{A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)}$

2 **El área lateral del cono de la figura es:**



a) 8 cm^2

b) 25,12 cm^2

c) 12,56 cm^2

d) 34 cm^2

3 **El área total del cono anterior es:**

a) 20 cm^2 b) 50,24 cm^2 c) 36,55 cm^2 d) 37,68 cm^2

4 **Halla el área total de un cono con r = 5 cm y h = 12 cm.**

ÁREA DE LA ESFERA

El área de una esfera de radio r es igual a cuatro veces el área del círculo del mismo radio que la esfera:

$$\boldsymbol{A = 4\pi r^2}$$

EJEMPLO

Calcula el área de una esfera de radio 10 cm.

$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 1\,256$ cm^2

5 **El área de una esfera de radio 15 cm es:**

a) 2 826 cm^3 b) 28,26 cm^2 c) 2 826 cm^2 d) 14,13 cm^2

