PLAN DE RECUPERACIÓN DE MATEMÁTICAS
3º ESO (Segundo Trimestre)

(Para alumnos de 4º de ESO)

NOMBRE:____

Para aprobar las matemáticas pendientes de cursos anteriores es **obligatorio** realizar el plan de recuperación correspondiente teniendo en cuenta lo siguiente:

- El plan de recuperación correspondiente al primer trimestre tendrá como fecha límite de entrega (no prorrogable) **el jueves 10 de Marzo.**
- Deberá estar trabajado de principio a fin.
- Deberá estar hecho a lápiz.
- Deberá estar hecho de forma clara, limpia y **legible**.

IDENTIFICAR SISTEMAS DE ECUACIONES Y SUS ELEMENTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** está formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de las que se busca una solución común.

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \textbf{Coeficientes} \text{ de las incógnitas: } a, a', b, b' \\ \textbf{Términos independientes: } k, k' \end{array}\right.$$

EJEMPLO

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + y = 5} \\ \mathbf{x - 2y = 2} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Incógnitas: } x, y \\ \text{Coeficientes de las incógnitas: } 1, 1, 1, -2 \\ \text{Términos independientes: } 5, 2 \end{array}\right.$$

1 **Determina las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 7 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2x + y = -1 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica ambas ecuaciones.
- **Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar sus soluciones.
- **Si un sistema tiene solución**, es decir, si se pueden encontrar dos números que cumplan las dos ecuaciones, se dice que es **compatible**.

EJEMPLO

Comprueba si el siguiente sistema de ecuaciones tiene como solución $x = 4$ e $y = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + y = 5} \\ \mathbf{x - 2y = 2} \end{array}\right\}$$

Veamos si la solución del enunciado verifica las dos ecuaciones del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 4,\, y = 1} \left.\begin{array}{r} 4 + 1 = 5 \\ 4 - 2 \cdot 1 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, $x = 4$ e $y = 1$ es una solución del sistema. El sistema es compatible.

2 **Determina si $x = 0$ e $y = -1$ es solución de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 2 \\ 3y = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + 4y = -4 \end{array}\right\}$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de sustitución:

a) **Despejamos** la incógnita en una de las dos ecuaciones.

b) **Sustituimos** la expresión obtenida en la otra ecuación.

c) **Resolvemos** la ecuación con una incógnita que resulta.

d) **Sustituimos** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.

e) **Comprobamos** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{array}\right\}$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita x de la segunda ecuación.

$$x = 10 + y$$

b) **Sustituimos** esta incógnita en la primera ecuación.

$$x + y = 30 \xrightarrow{x = 10 + y} (10 + y) + y = 30$$

c) **Resolvemos** la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} (10 + y) + y &= 30 \\ 10 + y + y &= 30 \\ 10 + 2y &= 30 \\ 2y &= 30 - 10 \\ y &= \frac{20}{2} \\ \boxed{y = 10} \end{aligned}$$

d) **Sustituimos** el valor $y = 10$ en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x + 10 &= 30 \\ \boxed{x = 20} \end{aligned}$$

e) **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hay que sustituir el par de valores (20, 10) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 20,\, y = 10} \left.\begin{array}{l} 20 + 10 = 30 \\ 20 - 10 = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 20$ e $y = 10$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1 **Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\}$$

a) Elegimos para despejar la incógnita y en la primera ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow y = 5 - x$$

b) Sustituimos esta incógnita en la segunda ecuación.

$$x - 2y = 2 \xrightarrow{y = 5 - x} x - 2(5 - x) = 2$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$\boxed{x = \quad}$

d) Sustituimos el valor de x obtenido en una de las ecuaciones, por ejemplo, en la primera.

$x + y = 5$

$\boxed{\quad} + y = 2$

$\boxed{y = \quad}$

Solución del sistema: $\boxed{x = \quad}$ $\boxed{y = \quad}$

e) Comprobamos la solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{\quad} + \boxed{\quad} = 5 \\ \boxed{\quad} + 2 \cdot \boxed{\quad} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 = 5 \\ 2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

Si obtenemos este resultado, los valores de x e y son correctos.

2 **Resuelve los sistemas mediante el método de sustitución y comprueba los resultados.**

a) $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 8 \\ 2x - y = 9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} -x + y = 7 \\ 3x - y = 4 \end{array}\right\}$

3 **Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba la solución del siguiente sistema.**

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{3x-1}{5}+2y=1\\ y+\dfrac{3x}{2}=2\end{array}\right\}$$

a) Reducimos a común denominador.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{3x-1}{5}+\dfrac{5\cdot 2y}{5}=\dfrac{5\cdot 1}{5}\\ \dfrac{2\cdot y}{2}+\dfrac{3x}{2}=\dfrac{2\cdot 2}{2}\end{array}\right\}$$

De esta manera obtenemos:

b) Quitamos los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{3x-1}{\cancel{5}}+\dfrac{10y}{\cancel{5}}=\dfrac{5}{\cancel{5}}\\ \dfrac{2y}{\cancel{2}}+\dfrac{3x}{\cancel{2}}=\dfrac{4}{\cancel{2}}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}3x-1+10y=5\\ 2y+3x=4\end{array}\right\}$$

Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. No olvides comprobar la solución.

4 **Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba el siguiente sistema.**

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-2}{3}+y=4\\ x+\dfrac{y}{3}=6\end{array}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de igualación:

a) **Despejamos** la misma incógnita en las dos ecuaciones.
b) **Igualamos** las expresiones obtenidas.
c) **Resolvemos** la ecuación de una incógnita que resulta.
d) **Sustituimos** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
e) **Comprobamos** la solución obtenida.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 3x + y &= 11 \end{aligned}\right\}$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita y de las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 1 &= y \\ 11 - 3x &= y \end{aligned}\right\}$$

b) **Igualamos** las expresiones obtenidas.

$$2x + 1 = 11 - 3x$$

c) **Resolvemos** la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 11 - 3x \\ 2x + 3x &= 11 - 1 \\ 5x &= 10 \\ &\boxed{x = 2} \end{aligned}$$

d) **Sustituimos** el valor $x = 2$ en cualquiera de las ecuaciones. Elegimos la segunda.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 11 \\ 3 \cdot 2 + y &= 11 \\ 6 + y &= 11 \\ &\boxed{y = 5} \end{aligned}$$

e) **Comprobamos** la solución obtenida.

Para ello hay que sustituir el par de valores (2, 5) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 3x + y &= 11 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 2,\ y = 5} \left.\begin{aligned} 2 \cdot 2 - 5 &= -1 \\ 3 \cdot 2 + 5 &= 11 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \text{Cumple la ecuación.} \\ &\to \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 2$ e $y = 5$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

1 **Resuelve el sistema mediante el método de igualación y comprueba la solución.**

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 77 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

a) Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 77 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\}\begin{aligned} &\rightarrow \\ &\rightarrow \end{aligned}$$

b) Igualamos las ecuaciones obtenidas.

c) Resolvemos la ecuación de una incógnita obtenida.

d) Sustituimos el valor de una de las incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

e) Comprobamos la solución.

2 **Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de igualación y comprueba los resultados.**

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x - 4y &= 0 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 10 \\ 4x + 10y &= 20 \end{aligned}\right\}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

3 **Resuelve mediante el método de igualación y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}&=4\\ x+y&=10\end{aligned}\right\}$$

a) Reducimos a común denominador.

$$\left.\begin{aligned}\frac{3x}{\cancel{6}}+\frac{2y}{\cancel{6}}&=\frac{24}{\cancel{6}}\\ x+y&=10\end{aligned}\right\}$$

b) Quitamos los denominadores.

$$\left.\begin{aligned}3x+2y&=24\\ x+y&=10\end{aligned}\right\}$$

Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. No olvides comprobar la solución.

4 **Resuelve mediante el método de igualación y comprueba el siguiente sistema.**

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}&=6\\ \frac{x}{3}+\frac{2y}{9}&=6\end{aligned}\right\}$$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de reducción:

a) **Buscamos un sistema con las mismas soluciones** donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.

b) **Restamos** o **sumamos** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando así una incógnita.

c) **Resolvemos** la ecuación que resulta.

d) **Sustituimos** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.

e) **Comprobar** la solución obtenida.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 25 \\ 2x + 3y = 40 \end{array}\right\}$$

a) **Obtenemos** un sistema con las mismas soluciones.

Elegimos una incógnita en las dos ecuaciones, en este caso x.

Multiplicamos la primera ecuación por 2.

$$\left.\begin{array}{r} 2(x + 2y = 25) \\ 2x + 3y = 40 \end{array}\right\}$$

Ahora el sistema equivalente es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ 2x + 3y = 40 \end{array}\right\}$$

b) **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar la x.

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ \underline{-\ (2x + 3x = 40)} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2x + 4y = \ \ 50 \\ \underline{-2x - 3y = -40} \\ y = \ \ 10 \end{array}$$

c) **Resolvemos** la ecuación de una incógnita que resulta.

$$\boxed{y = 10}$$

d) **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en este caso en la primera ecuación.

$$x + 2y = 25$$
$$x + 2 \cdot 10 = 25$$
$$\boxed{x = 5}$$

e) **Comprobamos** el resultado.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 25 \\ 2x + 3y = 40 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 5,\ y = 10} \left.\begin{array}{r} 5 + 2 \cdot 10 = 25 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 40 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 25 = 25 \\ 40 = 40 \end{array}\right\}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 5$ e $y = 10$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

1 **Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba el resultado.**

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = -10 \\ 4x + 5y = 140 \end{array}\right\}$$

a) Elegimos una incógnita, por ejemplo la *y*.

Multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 2.

$$\left.\begin{array}{l} 5(3x - 2y = -10) \\ 2(4x + 5y = 140) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 15x - 10y = -50 \\ 8x + 10y = 280 \end{array}\right\} \text{ Sistema con las mismas soluciones.}$$

b) Sumamos las dos ecuaciones para eliminar la *y*.

$$\begin{array}{rrl} & 15x - \cancel{10y} & = -50 \\ + & 8x + \cancel{10y} & = 280 \\ \hline & 23x \quad & = 230 \end{array}$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$\boxed{x = \quad}$

d) Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema y obtenemos el valor de *y*.

e) Comprobamos la solución.

2 **Resuelve por el método de reducción el sistema y comprueba el resultado.**

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 26 \\ 2x - 3y = -13 \end{array}\right\}$$

Elegimos una incógnita:

¿Por qué número tenemos que multiplicar las ecuaciones para que esa incógnita desaparezca al sumarlas?

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{}\,(3x + 2y = 26) \\ \boxed{}\,(2x - 3y = -13) \end{array}\right\} \rightarrow$$

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para **resolver un problema** mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, hay que realizar los siguientes pasos.

a) **Identificamos** las incógnitas.
b) **Planteamos** las ecuaciones y formamos el sistema de ecuaciones.
c) **Resolvemos** el sistema de ecuaciones mediante cualquiera de los tres métodos.
d) **Comprobamos** que la solución cumple las condiciones del enunciado.

EJEMPLO

La suma de las edades de dos hermanos es 29 y, dentro de 8 años, la edad del mayor será el doble que la edad del menor. ¿Cuántos años tiene cada hermano?

a) Identificamos las incógnitas

x = edad del hermano mayor
y = edad del hermano menor

b) Planteamos las ecuaciones y formamos el sistema.

- Planteamos el problema:

	HOY		DENTRO DE 8 AÑOS
Hermano mayor	x	→	$x + 8$
Hermano menor	y	→	$y + 8$
	$x + y = 29$		$x + 8 = 2(y + 8)$
	Las dos edades suman 29.		*La edad del mayor será el doble de la del menor.*

- Formamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x + y = 29 \\ x + 8 = 2(y + 8) \end{array}\right\}$

c) Resolvemos el sistema de ecuaciones. Eligiendo el método de sustitución, despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda.

$$x = 29 - y \rightarrow (29 - y) + 8 = 2(y + 8)$$
$$29 - y + 8 = 2y + 16$$
$$29 + 8 - 16 = 2y + y \rightarrow 21 = 3y \rightarrow y = 7$$

Sustituimos $y = 7$ en la primera ecuación: $x + 7 = 29 \rightarrow x = 29 - 7 = 22$

Por tanto: $x = 22$ años tiene el hermano mayor.
$y = 7$ años tiene el hermano menor.

d) Comprobamos que la solución cumple las condiciones del enunciado: sustituimos los valores obtenidos de x e y ($x = 22$ e $y = 7$) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 29 \\ x + 8 = 2(y + 8) \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 22,\ y = 7} \left.\begin{array}{l} 22 + 7 = 29 \\ 22 + 8 = 2 \cdot (7 + 8) \end{array}\right\} \rightarrow 30 = 14 + 16 \rightarrow 30 = 30$$

Por tanto, $x = 22$ e $y = 7$ es solución del problema.

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES

1 **Un alumno realiza un examen de diez preguntas. Por cada pregunta acertada le dan 2 puntos y por cada pregunta que falla le quitan 1 punto. Sabiendo que la calificación final fue de 8 puntos, ¿cuántos aciertos y fallos tuvo?**

a) Identificamos las incógnitas.

$x =$ ....

$y =$ ....

b) Planteamos las ecuaciones y formamos el sistema.

- Planteamos el problema:

	Primera ecuación		Segunda ecuación	
N.º de preguntas acertadas	x	→	$\square$	Puntuación de preguntas acertadas
N.º de preguntas falladas	y	→	$\square$	Puntuación de preguntas falladas
Total de preguntas: 10	$x + y =$	→	$\square$	Puntuación total: 8

- Formamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = \square \\ \boxed{} \end{cases}$$

c) Resolvemos el sistema. Elegimos el método de resolución más adecuado.

d) Comprobamos el resultado.

2 **En un hotel hay 120 habitaciones dobles e individuales. Si el número total de camas es 195, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?**

a) Identificamos las incógnitas.

$x =$ ....

$y =$ ....

b) Planteamos las ecuaciones y formamos el sistema.

- Planteamos el problema:

Habitaciones dobles	x	→		Camas en habitaciones dobles.
Habitaciones individuales	y	→		Camas en habitaciones individuales.
Total de habitaciones: 120		→		Total de camas: 195.
	Primera ecuación		Segunda ecuación	

- Formamos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{} \\ \boxed{} \end{array}\right.$$

c) Elegimos un método de resolución y resolvemos el problema.

d) Comprobamos el resultado.

220768 _ 0148-0179.indd 171 27/05/10 16:23

3 **Calcula dos números cuya suma es 10 y su diferencia es 6.**

4 **En un corral hay 25 ovejas y gallinas y contando las patas hay 80 en total. ¿Cuántas ovejas y gallinas son?**

5 **Paloma tiene monedas de 2 € y 1 €. Sabiendo que tiene 20 monedas y que el valor de todas es 33 €, calcula el número de monedas que tiene de cada tipo.**

	MONEDAS	VALOR DE LAS MONEDAS	
De 1 €			
De 2 €			
Total de monedas: 20			Valor total: 33 €.

OBJETIVO 1

DISTINGUIR RELACIONES FUNCIONALES ENTRE MAGNITUDES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Magnitud** es cualquier característica que puede ser medida y su valor expresado mediante un número.
- Una **relación entre dos magnitudes** es una forma de asociar una serie de valores de una de ellas con una serie de valores de la otra. Por ejemplo:
  – El consumo de gasolina de un coche está asociado a la distancia recorrida.
  – El precio del menú de un restaurante depende de los platos elegidos.
  – El precio de las entradas de cine está relacionado con el número de amigos que vamos.
- En una relación entre magnitudes, los valores de estas cambian, y por eso las magnitudes se llaman **variables**.

1 **¿Qué características son magnitudes? Marca con una cruz.**

a) El número de páginas de un libro.
b) El color de la tapa de un cuaderno.
c) El precio de un disco compacto.
d) La altura de un edificio.

2 **De las parejas de magnitudes, ¿cuáles están relacionadas? Marca con una cruz.**

a) La altura de los alumnos de clase y su nota en Matemáticas.
b) El coeficiente intelectual de una persona y su lugar de nacimiento.
c) El número de entradas de cine y su importe.
d) La velocidad de un coche y el tiempo utilizado en un trayecto.

FUNCIÓN

Si en una relación entre dos magnitudes, cada valor de una de ellas está asociado a un único valor de la otra, se dice que esa correspondencia o relación es una **función**.

– Las magnitudes *número de kilos de naranjas* y *coste* representan una función.
  A un cierto número de kilos solo le corresponde un precio.
– El coeficiente intelectual de una persona y su lugar de nacimiento no representan una función.
  A un cierto coeficiente le pueden corresponder varios lugares de nacimiento.

La **variable independiente (*x*)** puede tomar cualquier valor, y el valor de la **variable dependiente (*y*)** depende del que tome la variable independiente.

3 **De los siguientes pares de magnitudes, señala cuáles representan una función. Identifica su variable dependiente e independiente.**

a) El volumen de un cubo y su arista.
b) La edad de una persona y su color de ojos.
c) El importe del recibo de la luz y la cantidad de electricidad que se gasta.
d) La edad de una persona y su talla de camisa.
e) El número de diagonales y el número de lados de un polígono.
f) La edad de un padre y la edad de su hijo.

OBJETIVO 2

CONOCER LAS DIFERENTES EXPRESIONES DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

FORMAS DE EXPRESAR UNA FUNCIÓN

La relación entre dos variables se puede expresar de diferentes maneras:

- **Mediante un texto:** descripción verbal y/o escrita que expresa la relación entre dos variables. Es lo que se suele llamar enunciado del problema.
- **Mediante una tabla:** los valores de las variables independiente y dependiente se organizan en forma de tabla.
- **Mediante un gráfico:** nos da una visión cualitativa de la relación que existe entre las variables. Puede ser una representación en unos ejes de coordenadas.
- **Mediante una fórmula o expresión algebraica:** podemos calcular qué valor de la variable dependiente corresponde a un valor de la variable independiente.

EJEMPLO

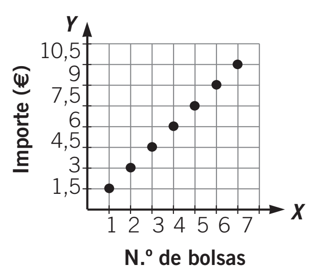
Un grupo de amigos va al cine y compran bolsas de palomitas. Una bolsa vale 1,50 €, dos bolsas valen 3 € y cinco bolsas valdrán 7,50 €.

Vamos a expresar este ejemplo de las cuatro maneras que acabamos de ver:

- **Mediante un texto:** el importe que hay que pagar en euros es el producto de 1,50 por el número de bolsas de palomitas compradas.
- **Mediante una tabla:** el número de bolsas es la variable independiente y el importe es la variable dependiente.

N.º DE BOLSAS	1	2	3	…
IMPORTE (€)	1,50	3	4,50	…

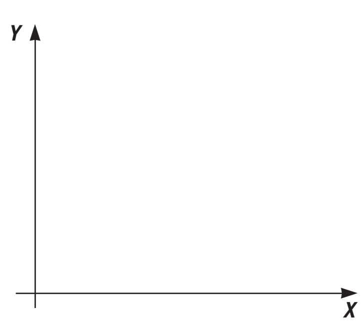
- **Mediante un gráfico:** hemos elegido un gráfico de puntos en un sistema de ejes de coordenadas.



- **Mediante una fórmula:** si llamamos y al importe en euros y x al número de bolsas de palomitas, la fórmula será: $y = 1{,}5 \cdot x$

1 **Una compañía telefónica cobra en su recibo una cuota fija de 0,13 € en cada llamada y 0,15 € por cada minuto. Obtén la tabla, la gráfica y la fórmula que expresa la relación entre el importe del recibo de teléfono y el número de minutos.**

N.º DE MINUTOS (x)				
IMPORTE DEL RECIBO (y)				



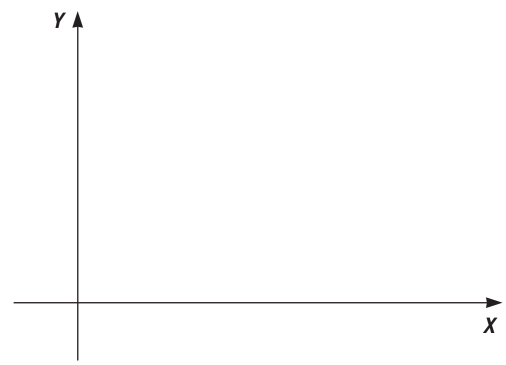
ADAPTACIÓN CURRICULAR

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La **gráfica de una función** es la representación del conjunto de puntos que definen esa función.

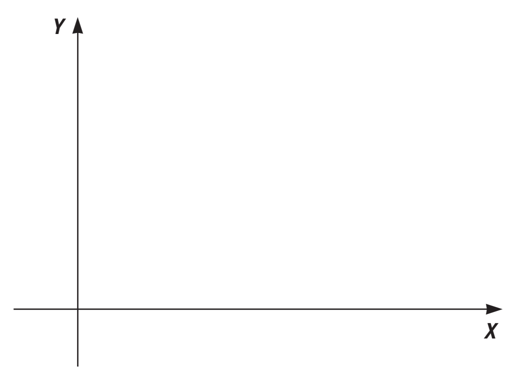
2 **La siguiente tabla expresa la relación entre el lado de un cuadrado y su área. Obtén la gráfica y la fórmula que representa la relación entre ambas magnitudes.**

LADO	ÁREA
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100



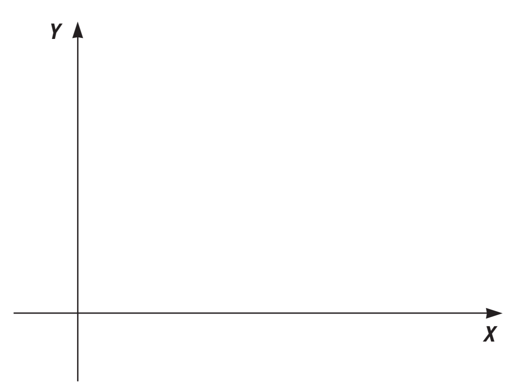
3 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^2 + 1$, obtén la tabla y la gráfica.**

x	$y = f(x)$
-3	$(-3)^2 + 1 = 10$
-2	
1	
0	
1	
2	
3	



4 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^2 - 2$, obtén la tabla y la gráfica.**

x	$y = f(x)$



5 **Expresa, mediante una fórmula, la relación que existe entre las siguientes magnitudes.**

a) El radio de una circunferencia y su longitud.
b) El lado de un cuadrado y su área.
c) El radio de una esfera y su volumen.

CALCULAR EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una relación entre dos magnitudes es una **función** si a cada valor de la variable independiente se le asocia un único valor de la variable dependiente: $f(x) = y$
- El valor de la **variable independiente** se suele representar por x, y también se llama **original**.
- El valor de la **variable dependiente** se suele representar por y, y también se llama **imagen**.
- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x.
- El **recorrido** de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable y.

EJEMPLO

Dada la función $f(x) = 2x + 3$, calcula las imágenes para $x = 0$ y $x = -1$.

$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$ $\qquad$ $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$

Halla el dominio y el recorrido de la función $f(x) = 3x - 7$.

El dominio y el recorrido de la función son el conjunto de los números reales, ya que la variable x puede tomar como valor cualquier número real, y para cada uno de esos números reales, la variable y tiene como valor también un número real.

1 **Dada la función que asocia a cada número entero su cuarta parte más 5 unidades:**

a) Halla su fórmula o expresión algebraica.
b) Calcula $f(2)$ y $f(0)$.
c) ¿Es posible encontrar la imagen de $\frac{2}{3}$?
d) Determina el dominio.

2 **Dada la relación que asocia a cada número real el inverso de la suma de ese número más 5:**

a) ¿Es una función? Si lo es, determina cuál es su fórmula.
b) ¿Se puede calcular $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ y $f(-5)$?
c) Determina su dominio y recorrido.

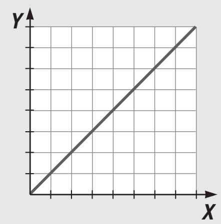
OBJETIVO 4

DISTINGUIR ENTRE FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

NOMBRE: ________________ CURSO: ________ FECHA: ________

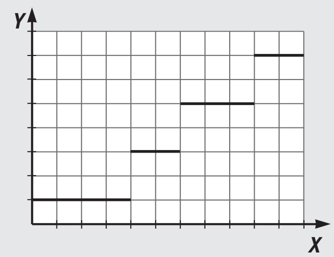
FUNCIÓN CONTINUA

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo.



FUNCIÓN DISCONTINUA

Una función es discontinua si no se puede dibujar de un solo trazo.



Los puntos donde necesitamos levantar el lápiz del papel se denominan puntos de discontinuidad.

1 **Estudia la relación que existe entre la edad de Juan y la paga semanal que le dan sus padres, teniendo en cuenta estos datos. Desde que nació hasta los 10 años no recibió paga semanal, desde los 10 años hasta los 12 recibió 5 € semanales, desde los 12 años hasta los 15 recibió 8 €, desde los 15 años hasta los 20 recibió 10 €, y a partir de los 20 años dejó de recibir paga semanal. Obtén la tabla que relaciona ambas magnitudes y la gráfica. ¿Cómo es la función que has obtenido, continua o discontinua?**

2 **Un vendedor de muebles tiene un sueldo base de 650 € y por cada mueble que vende cobra una comisión de 100 €.**

a) Representa la gráfica que expresa el sueldo en función del número de muebles vendidos.

b) ¿Es la función continua o discontinua?

3 **Dada la función que asocia a cada número real su cuádruple más 2 unidades:**

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Representa gráficamente la función.

c) ¿Es continua o discontinua?

220768 _ 0326-0353.indd 342 27/05/10 16:37

ESTUDIAR EL CRECIMIENTO Y EL DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

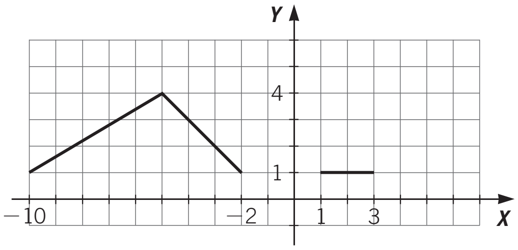
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Dada una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$:

- Si $f(x_2) - f(x_1) > 0$, la función es **creciente** entre x_1 y x_2.
- Si $f(x_2) - f(x_1) < 0$, la función es **decreciente** entre x_1 y x_2.

EJEMPLO

Dada la siguiente función, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento.



Siempre se empieza estudiando el eje X, de izquierda a derecha.

- En el intervalo $[-10, -5]$, la función crece y su tasa de crecimiento es:

$$\left.\begin{array}{r} f(-10) = 1 \\ f(-5) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow f(-5) - f(-10) = 4 - 1 = 3$$

- En el intervalo $[-5, -2]$, la función decrece y su tasa de decrecimiento es:

$$\left.\begin{array}{r} f(-5) = 4 \\ f(-2) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow f(-5) - f(-2) = 4 - 1 = 3$$

- Hay una discontinuidad desde $x = -2$ a $x = 1$.
- En el intervalo $[1, 3]$, la función no crece ni decrece, se mantiene constante.

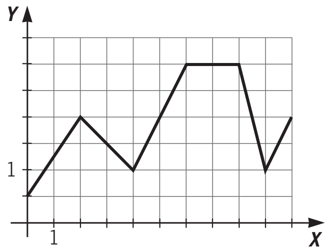
1 **Representa una función con las siguientes características.**

a) Es creciente en los intervalos [2, 5] y [7, 9].

b) Es decreciente en [5, 7].

c) Es constante en [0, 2].

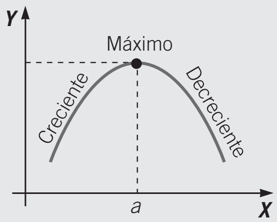
2 **Dada la función representada por la gráfica siguiente, estudia su continuidad y crecimiento.**

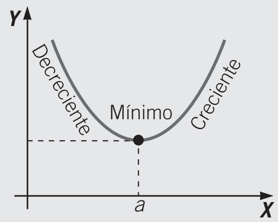


ESTUDIAR EL CRECIMIENTO Y EL DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- Una función tiene un **máximo** en un punto si, a la izquierda de ese punto, la función es creciente, y a la derecha es decreciente.
- Una función tiene un **mínimo** en un punto si, a la izquierda de ese punto, es decreciente, y a la derecha, creciente.





3 **Dada la función $y = x^2 - 4$, haz una tabla de valores, represéntala y estudia si es continua, dónde es creciente y decreciente y si tiene máximos y mínimos.**

4 **La siguiente tabla muestra la cantidad de medicamento en sangre que tiene una persona después de tomar un jarabe.**

TIEMPO (horas)	1	2	3	4	5	6	7
CANTIDAD (mg/dl)	90	75	60	45	30	15	0

a) Haz una gráfica a partir de la tabla.
b) La función representada, ¿es continua?
c) ¿Es creciente o decreciente?
d) ¿Tiene máximo o mínimo?

RECONOCER LAS FUNCIONES PERIÓDICAS

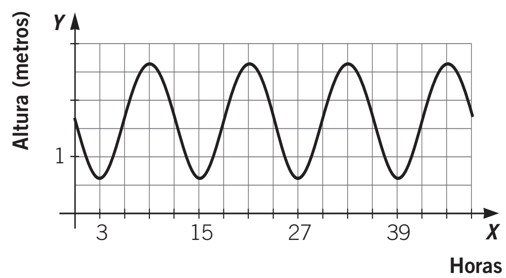
NOMBRE: ______________________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

FUNCIÓN PERIÓDICA

En una **función periódica**, su gráfica se repite cada cierto intervalo, que se denomina período, es decir: $f(x) = f(x + T)$, siendo T el valor del período.

EJEMPLO

Analiza cómo varía la profundidad del agua en una playa a lo largo del tiempo.



Esta función es periódica porque si tomamos la gráfica en el intervalo [3, 15], vemos que se repite exactamente igual en el intervalo [15, 27] y sigue repitiéndose en [27, 39], y así de forma sucesiva.

Se llama período a la longitud del intervalo que se repite:

$$\left.\begin{array}{r} [3, 15] \rightarrow \ \ 3 - 15 = 12 \\ [15, 27] \rightarrow 27 - 15 = 12 \\ [27, 39] \rightarrow 39 - 27 = 12 \end{array}\right\} \rightarrow \text{En este caso, el período es 12.}$$

1 **Un tren sale de Alborada a las 12 horas y se dirige a Borán a velocidad constante, llegando en 40 minutos. Para durante 20 minutos y, después, sale de Borán con dirección a Alborada, llegando en 50 minutos. Vuelve a parar 10 minutos y a la hora en punto vuelve a salir hacia Borán respetando los mismos tiempos y las mismas paradas.**

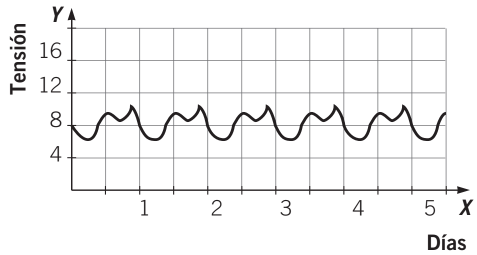
a) Representa gráficamente esta situación (coloca en el eje de abscisas el tiempo, y en el eje de ordenadas la distancia del tren respecto a Alborada).

b) ¿Es periódica esta función? ¿Cuál es su período?

2 **La cantidad de lluvia que cae en un lugar depende de su situación y de la época del año. Inventa los datos y dibuja una gráfica. ¿Es una función periódica? ¿Tiene máximos y mínimos?**

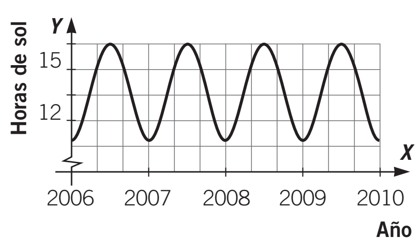
RECONOCER LAS FUNCIONES PERIÓDICAS

3 **La gráfica muestra cómo varía la tensión arterial mínima de una persona a lo largo de varios días.**



a) ¿Es una función periódica? Si lo es, indica el período.
b) ¿En qué intervalos es creciente? ¿Y decreciente?
c) ¿Cuándo se da un máximo? ¿Y un mínimo?

4 **Observa el gráfico que muestra las horas de luz solar en un lugar en el mes de enero durante 5 años consecutivos.**



a) ¿Es una función periódica?
b) ¿Cuál es el período?
c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento?

RECONOCER Y DIFERENCIAR ENTRE POBLACIÓN Y MUESTRA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

POBLACIÓN Y MUESTRA

- **Estadística** es la ciencia encargada de recopilar y ordenar datos referidos a diversos fenómenos para su posterior análisis e interpretación.
- **Población** es el conjunto de elementos en los que se estudia un determinado aspecto o característica.
- **Muestra** es una parte de la población. Es importante escoger correctamente la muestra: debe ser representativa, es decir, dar una información similar a la obtenida si estudiásemos toda la población.

EJEMPLO

Considera tu clase como la población y completa el siguiente cuestionario.

Nombre: .... **Apellidos:** ....

Marca con una cruz la respuesta elegida y responde.

Sexo: ☐ Hombre ☐ Mujer

Deporte preferido:

☐ Fútbol ☐ Baloncesto ☐ Tenis ☐ Balonmano ☐ Otros

¿Cuántos hermanos tienes?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 o más hermanos

¿Cuántos años tienes?

☐ 13 años ☐ 14 años ☐ 15 años ☐ 16 años

¿Qué altura tienes?

¿Cuánto pesas?

Puede ocurrir que el día en que se reparta el cuestionario falte alguien en clase o que algún alumno no conteste y, aunque nuestro objetivo sea toda la **población**, es decir, el conjunto de los alumnos de clase, usaremos una parte de la población llamada **muestra**, que en nuestro caso estará formada por aquellos alumnos que hayan contestado al cuestionario.

1 **Señala en qué casos es más conveniente estudiar la población o una muestra.**

a) La longitud de los tornillos que fabrica una máquina de manera ininterrumpida.
b) La estatura de todos los visitantes extranjeros en un año en España.
c) El peso de un grupo de cinco amigos.
d) Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano.
e) El número de hijos de las familias de una comunidad de vecinos.
f) La talla de camisa de los varones de una comunidad autónoma.
g) Los gustos musicales de los jóvenes de una ciudad.
h) La altura media de veinte alumnos de una clase.

CLASIFICAR LAS VARIABLES ESTADÍSTICAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

VARIABLE ESTADÍSTICA

- **Variable estadística** es toda característica o aspecto de los elementos de una población o muestra que se puede estudiar.
- Las variables estadísticas pueden ser **cuantitativas o cualitativas**.
- **Variables cuantitativas:** los valores que puede tomar son números. Pueden ser discretas o continuas.
  – **Variables cuantitativas discretas:** toman un número determinado de valores.
  – **Variables cuantitativas continuas:** pueden tomar cualquier valor comprendido entre dos dados.
- **Variables cualitativas:** no se pueden medir.

EJEMPLO

En el cuestionario del ejemplo anterior, diferencia las variables cuantitativas y cualitativas.

- Variables estadísticas cuantitativas: número de hermanos, edad, peso y altura.
  Estas variables las expresamos mediante números.
  – Variables estadísticas cuantitativas discretas: número de hermanos y edad.
  – Variables estadísticas cuantitativas continuas: peso y altura.
- Variables estadísticas cualitativas: sexo y deporte preferido.
  Estas variables no se expresan mediante números.

1 **Señala en cada caso lo que corresponda.**

VARIABLE	CUANTITATIVA		CUALITATIVA
	DISCRETA	CONTINUA	
Provincia de residencia			
Número de vecinos de un edificio			
Profesión de la madre			
Altura de un edificio			
Número de llamadas telefónicas diarias			
Número de primos			
Tipo de música preferida			
Barras de pan consumidas en una semana en un colegio			
Consumo de gasolina por cada 100 km			
Número de la puerta de tu casa			
Color de pelo			
Talla de pantalón			

220768 _ 0382-0419.indd 395 27/05/10 16:42

OBJETIVO 3

OBTENER LA TABLA ESTADÍSTICA ASOCIADA A UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TABLAS ESTADÍSTICAS

- Las **tablas estadísticas** sirven para organizar los datos de una variable estadística y estudiarlos con mayor facilidad.
- **Si la variable es discreta** y tenemos un conjunto de datos pequeño, se forma una tabla con dos columnas. En una de las columnas se colocan los distintos valores de la variable, y en la otra columna, el número de veces que aparece cada uno de ellos.
- **Si la variable es continua**, se agrupan los valores en intervalos de igual amplitud, se establece la marca de clase, que es el punto medio de cada intervalo, y se hace el recuento de los datos de cada intervalo.

EJEMPLO

Daniel ha comprado 5 bolsas de palomitas, 7 caramelos, 2 chicles de menta y 10 piruletas. Organiza este conjunto de datos en una tabla.

Si queremos recoger la información en una tabla, ponemos en una columna los distintos valores de la variable: bolsas de palomitas, caramelos, chicles de menta y piruletas, y en la otra, el número de veces que aparece cada uno de ellos.

ARTÍCULOS	RECUENTO
Bolsas de palomitas	5
Caramelos	7
Chicles de menta	2
Piruletas	10

EJEMPLO

Las estaturas (en cm) de 27 jóvenes son:

155, 178, 170, 165, 173, 168, 160, 166, 176, 169, 158, 170, 179, 161, 164, 156, 170, 171, 167, 151, 163, 158, 164, 174, 176, 164, 154

Forma una tabla, efectúa el recuento y obtén las marcas de clase.

En este caso, la variable es continua. Por tanto, debemos agrupar los datos en intervalos.

Para ello obtenemos la diferencia entre el valor mayor y el menor:

$$179 - 151 = 28$$

Para incluir todos los valores, tomamos 6 intervalos de amplitud 5 ($6 \cdot 5 = 30$, que es mayor que la diferencia entre el mayor y el menor).

Empezamos por el valor 150.

Marcas de clase:
$(150 + 155)/2 = 152,5$
$(155 + 160)/2 = 157,5$
$(160 + 165)/2 = 162,5$
$(165 + 170)/2 = 167,5$
$(170 + 175)/2 = 172,5$
$(175 + 180)/2 = 177,5$

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECUENTO
[150, 155)	152,5	2
[155, 160)	157,5	4
[160, 165)	162,5	6
[165, 170)	167,5	5
[170, 175)	172,5	6
[175, 180]	177,5	4

1 Las edades (en años) de 20 alumnos son:

13, 15, 14, 16, 13, 15, 14, 16, 15, 14, 13, 13, 13, 15, 14, 16, 14, 14, 15, 13

¿Qué tipo de variable es? Construye la correspondiente tabla.

EDADES	RECUENTO

2 El sexo de 20 alumnos es:

M, V, V, M, M, M, V, V, M, M, V, M, V, V, M, M, M, M, V, M

¿Qué tipo de variable es? Construye la tabla asociada a estos datos.

SEXO	RECUENTO

3 El peso (en kg) de 20 alumnos es:

66,5; 59,2; 60,1; 64,2; 70; 50; 41,6; 47,9; 42,8; 55;
52,2; 50,3; 42,2; 61,9; 52,4; 49,2; 41,6; 38,8; 36,5; 45

¿Qué tipo de variable es? Construye la tabla asociada a estos datos.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECUENTO

4 El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3, 4, 3, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 2, 0, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 0, 1, 2, 1, 4, 2

Obtén una tabla del recuento de datos.

CALCULAR LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA

- **Frecuencia absoluta**, f_i, de un conjunto de datos es el número de veces que se repite cada valor de la variable, x_i, en el total de los datos.

  La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, N.

- **Frecuencia relativa**, h_i, es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos: $h_i = \frac{f_i}{N}$

  La frecuencia relativa es siempre un número comprendido entre 0 y 1.

  La suma de las frecuencias relativas es 1.

- **Porcentaje (%)** es el resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

EJEMPLO

Las edades (en años) de 20 alumnos de un instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén la tabla de frecuencias y porcentajes.

Comenzamos a construir la tabla.

– En la primera columna colocamos los valores de la variable.

– En la segunda columna colocamos el número de veces que aparece cada dato. A este número se le llama frecuencia absoluta.

– En la tercera columna colocamos el *cociente* entre la frecuencia absoluta de cada dato y el número total de datos (20). A este número se le denomina *frecuencia relativa.*

x_i	f_i	h_i	%
13	6	0,30	30
14	7	0,35	35
15	4	0,20	20
16	3	0,15	15
Suma	20	1	100

$$h_1 = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30 \qquad h_2 = \frac{f_2}{N} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

$$h_3 = \frac{f_3}{N} = \frac{4}{20} = 0{,}20 \qquad h_4 = \frac{f_4}{N} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

– En la cuarta columna colocamos el porcentaje, resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

1 **Las notas de inglés de 20 alumnos fueron:**

6, 5, 3, 1, 2, 5, 6, 5, 9, 8,
7, 4, 9, 10, 7, 7, 8, 6, 5, 5

Construye la tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.

x_i	f_i	h_i	%
1	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	$0{,}05 \cdot 100 = 5$
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Suma	20		

220768 _ 0382-0419.indd 398 27/05/10 16:42

EJEMPLO

Los resultados de un test de inteligencia hecho a 25 personas fueron:

100, 80, 92, 101, 65, 72, 121, 68, 75, 93, 101, 100, 102,
97, 89, 73, 121, 114, 113, 113, 106, 84, 94, 83, 74

Obtén la tabla de frecuencias y de porcentajes tomando intervalos de amplitud 10.

– En la primera columna colocamos los valores de la variable, tomando 6 intervalos de amplitud 10, ya que la diferencia entre los valores extremos es 121 − 65 = 56.
– En la segunda columna colocamos la marca de clase de cada intervalo.
– En la tercera columna colocamos el número de veces que aparece cada dato. A este número se le llama frecuencia absoluta.
– En la cuarta columna colocamos el cociente entre la frecuencia absoluta de cada dato y el número total de datos (20). A este número se le denomina frecuencia relativa.
– En la quinta columna colocamos el porcentaje, que es el resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[65, 75)	70	5	0,20	20
[75, 85)	80	4	0,16	16
[85, 95)	90	4	0,16	16
[95, 105)	100	6	0,24	24
[105, 115)	110	4	0,16	16
[115, 125]	120	2	0,08	8

2 **El peso (en kg) de 24 personas es:**

68,5; 34,2; 47,5; 39,2; 47,3; 79,2; 46,5; 58,3; 62,5; 58,7; 80; 63,4;
58,6; 50,2; 60,5; 70,8; 30,5; 42,7; 59,4; 39,3; 48,6; 56,8; 72; 60

Agrúpalo en intervalos de amplitud 10 y obtén la tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%

3 **Completa la siguiente tabla.**

x_i	f_i	h_i	%
10		4	
20	5		10
30		61	
40	10		
50		41	
60			18

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 5

CALCULAR LAS FRECUENCIAS ACUMULADAS DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

FRECUENCIAS ACUMULADAS

- **Frecuencia absoluta acumulada, F_i,** de un valor x_i es la suma de las frecuencias f_j de todos los valores menores o iguales que él.
- **Frecuencia relativa acumulada, H_i,** de un valor x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos: $H_i = \frac{F_i}{N}$

EJEMPLO

Las edades (en años) de 20 alumnos de un instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén la tabla de frecuencias absolutas acumuladas y frecuencias relativas acumuladas.

– Para obtener la frecuencia absoluta acumulada de cada valor hay que sumar las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales que él:

$F_1 = f_1 = 6$

$F_2 = f_1 + f_2 = 6 + 7 = 13$

$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 6 + 7 + 4 = 17$

$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 6 + 7 + 4 + 3 = 20$

– Para obtener la frecuencia relativa acumulada de un valor hay que dividir la frecuencia absoluta acumulada de cada valor entre el número total de datos:

$$H_1 = \frac{F_1}{N} = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30$$

$$H_2 = \frac{F_2}{N} = \frac{f_1 + f_2}{N} = \frac{6+7}{20} = \frac{13}{20} = 0{,}65$$

$$H_3 = \frac{F_3}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{N} = \frac{6+7+4}{20} = \frac{17}{20} = 0{,}20$$

$$H_4 = \frac{F_4}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{N} = \frac{6+7+4+3}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

DATOS x_i	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (F_i)	FRECUENCIA RELATIVA (h_i)	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA (H_i)
13	6	6	0,30	0,30
14	7	13	0,35	0,65
15	4	17	0,20	0,85
16	3	20	0,15	1

1 **Dados los datos de una variable estadística y las frecuencias absolutas, completa la tabla de frecuencias relativas y frecuencias absolutas y relativas acumuladas.**

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
1	4			
2	4			
3	3			
4	7			
5	5			
Suma				

2 **Los datos de la tabla se refieren a la estatura (en cm) de 40 alumnos. Obtén la tabla de frecuencias asociada a estos datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[150, 155)		3		
[155, 160)		6		
[160, 165)		9		
[165, 170)		10		
[170, 175)		7		
[175, 180]		5		

3 **Dados los siguientes datos de una variable estadística, calcula su tabla de frecuencias.**

INTERVALO	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8]
FRECUENCIA	10	8	4	2

4 **Completa la siguiente tabla.**

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%
10	5				
11		13			
12	10				
13		35			
14	7				
15	8				16

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 6

UTILIZAR E INTERPRETAR LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

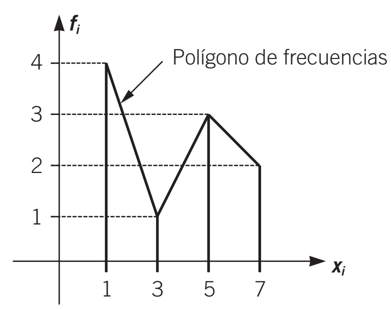
Los **gráficos** ayudan a representar fácilmente la información que contienen las tablas estadísticas. Según sea la variable, se usa un tipo u otro de gráfico.

- **Diagrama de barras:** se usa para representar datos cualitativos o cuantitativos discretos.
  Sobre el eje *X* se señalan los valores de la variable y se levantan barras de altura igual a la frecuencia representada (absoluta, absoluta acumulada, relativa o relativa acumulada).
- **Polígono de frecuencias:** es una línea poligonal que se obtiene a partir del diagrama de barras, uniendo cada extremo de una barra con el extremo de la barra siguiente.
- **Histograma:** se usa para representar variables cuantitativas continuas.
  Se señalan sobre el eje horizontal los extremos de los intervalos y se levantan rectángulos de altura igual a la frecuencia representada.
- **Polígono de frecuencias:** se obtiene al unir los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos del histograma.

EJEMPLO

Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias del conjunto de datos.

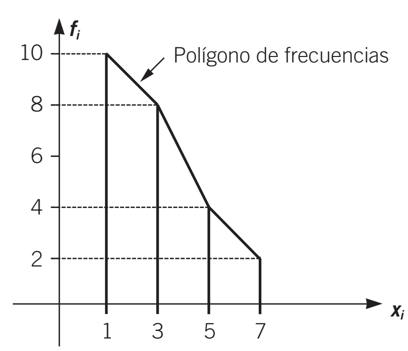
x_i	1	3	5	7
f_i	4	1	3	2



EJEMPLO

Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias del siguiente conjunto de datos.

x_i	1	3	5	7
f_i	10	8	4	2



220768 _ 0382-0419.indd 402 27/05/10 16:42

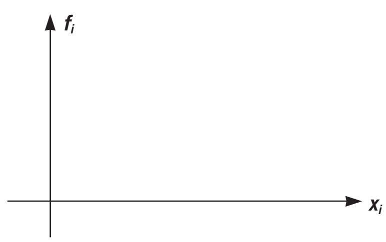
1 **La talla de calzado que utilizan 20 alumnos en una clase de Educación Física es:**

37, 40, 39, 37, 38, 38, 38, 41, 42, 37, 43, 40, 38, 38, 38, 40, 37, 37, 38, 38

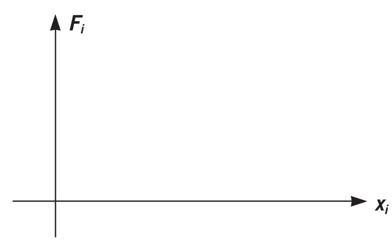
Construye la tabla de frecuencias y representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias para las frecuencias absolutas y para las frecuencias absolutas acumuladas.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
37	5			
38	8			
39	1			
40	3			
41	1			
42	1			
43	1			
Suma				

FRECUENCIAS ABSOLUTAS



FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



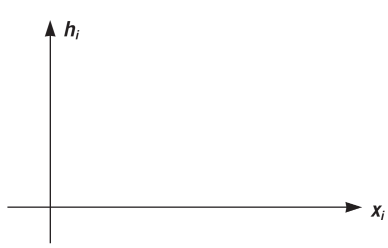
2 **En un edificio hay 25 viviendas y el número de vehículos por vivienda es:**

0, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 1

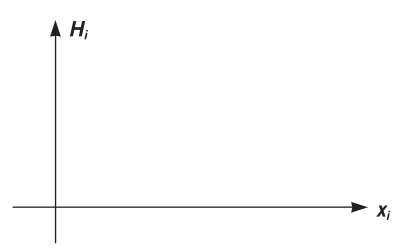
Construye la tabla de frecuencias y representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias para las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0				
1				
2				
3				
4				
Suma				

FRECUENCIAS RELATIVAS



FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS



3 **Al efectuar una encuesta a 50 clientes de un supermercado sobre los kilos de carne comprados a la semana, el 10 % afirmó que compraba de 1 a 2,5 kg; 20 de ellos compraban de 2,5 a 4 kg; el 30 % compraba de 4 a 5,5 kg y el resto de 5,5 a 7 kg.**

a) Completa la tabla de frecuencias.

b) Representa el histograma de frecuencias relativas.

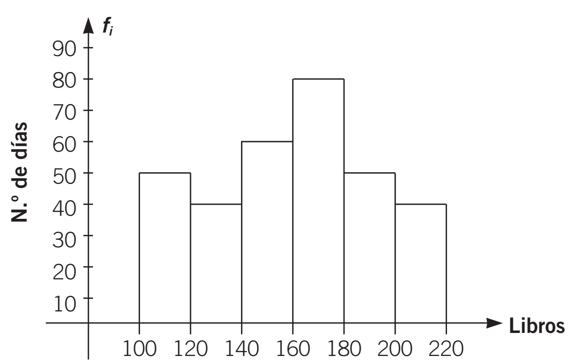
INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	h_i	F_i	H_i	%

4 **Observa el histograma de frecuencias absolutas referido a los libros vendidos diariamente en una librería.**

a) Completa la tabla de frecuencias.

b) Representa el histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

c) ¿Qué porcentaje de días se vendieron más de 200 libros? ¿Y menos de 100?



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS

INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	h_i	F_i	H_i	%

CALCULAR E INTERPRETAR LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La media, la mediana y la moda se llaman **medidas de centralización** y son valores que resumen la información de la muestra.

MEDIA

Dado un conjunto de datos: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con frecuencias $f_1, f_2, \ldots, f_n$, la **media**, $\overline{x}$, es igual a:

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Si los datos están agrupados en intervalos, el valor x_i es la marca de clase de cada intervalo.

EJEMPLO

Halla la media del siguiente conjunto de datos.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
26	6	156
28	7	196
30	4	120
32	3	96
Suma	20	568

$$\overline{x} = \frac{568}{20} = 28,4$$

En la tabla de frecuencias hemos añadido una tercera columna donde se calcula el producto de cada valor por su frecuencia relativa.

1 **Dados los datos: 2, 5, 7, 8 y 7, calcula su media.**

2 **Halla la media del siguiente conjunto de datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
[0, 20)	10	50	
[20, 40)	30	67	
[40, 60)	50	30	
[60, 80]	70	42	
	Suma		

3 **Una alumna ha realizado 8 exámenes de una asignatura obteniendo estas notas: 7, 5, 6, 10, 9, 7, 6 y 6. ¿Qué nota media obtendrá en esa asignatura? Ten en cuenta que para hallar la media hay que sumar los datos y dividir el resultado entre el número total de datos.**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

MEDIANA Y MODA

- La **mediana** de un conjunto de datos es el valor tal que, ordenados los datos de forma creciente, la mitad son menores que él y la otra mitad son mayores. Se representa por ***Me***.
  – Si el conjunto de datos es un número impar, la mediana es el valor central.
  – Si el conjunto de datos es un número par, la mediana es la media de los dos valores centrales.
- La **moda** de un conjunto de datos es el valor o valores de la variable que más se repite. Se representa por ***Mo***.

  El valor de la moda puede no ser único, es decir, puede haber varias modas.

EJEMPLO

Obtén la mediana y la moda del siguiente conjunto de datos: 2, 2, 1, 6, 4, 3 y 9.

- Mediana:
  Ordenamos de forma creciente los datos: 1, 2, 2, **3**, 4, 6, 9.
  Como el número de datos es impar, la mediana es el valor central: $Me = 3$.
- Moda: el valor que más se repite es 2; por tanto, $Mo = 2$.

4 **Se estudia el número de usuarios de 20 autobuses, obteniendo los siguientes datos.**
3, 12, 7, 16, 22, 13, 18, 4, 6, 19, 24, 25, 4, 8, 12, 22, 17, 19, 23, 4

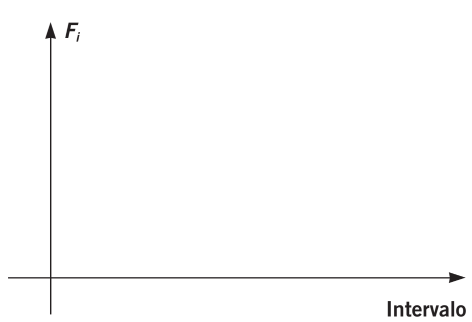
a) Realiza la tabla, agrupando los valores de 5 en 5 y empezando desde cero.
b) Calcula la moda, la mediana y la media.
c) Realiza un histograma con las frecuencias acumuladas.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$

Media: $\bar{x} =$

Mediana: $Me =$

Moda: $Mo =$



5 **Calcula la media, la mediana y la moda del siguiente conjunto de datos.**

4, 7, 10, 8, 3, 2, 1, 2, 2, 8

6 **Las tallas de calzado que usan los 20 alumnos de una clase de 3.° ESO son:**

34, 34, 35, 35, 35, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40

Halla la media, la mediana y la moda.

7 **Un deportista quiere comprarse una bicicleta de montaña y analiza el precio y el peso de estas bicicletas.**

BICICLETA	PRECIO (€)	PESO (kg)
Marin Rift Zone	1 474	13,12
Kastle Degree 12.0	2 879	12,2
Sistesi Bazooka	3 540	15,7
Bianchi NTH	4 350	11,52
Arrow Spyce HPR	1 799	13,1
Pro-Flex Beast	1 788	13,46
DBR V-Link Pro	4 494	11,66
Specialized M-2 S-Works	2 934	10,35
Sunn Revolt 2	2 172	11,21
BH Top Line Expert 001	2 550	9,95

a) Halla el precio medio.

b) Calcula el peso medio.

220768 _ 0382-0419.indd 407 27/05/10 16:42

OBJETIVO 8

CALCULAR E INTERPRETAR LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **medidas de dispersión** son medidas estadísticas que indican el mayor o menor grado de agrupamiento, alrededor de las medidas centrales, de los valores que forman un conjunto de datos.

El recorrido, la desviación, la desviación media, la varianza y la desviación típica son medidas de dispersión.

RANGO Y DESVIACIÓN RESPECTO DE LA MEDIA

- El **rango o recorrido** se calcula como la diferencia entre el mayor valor y el menor de la variable estadística.
- La **desviación respecto a la media** es la diferencia entre cada valor de la variable y la media. La suma de las desviaciones siempre es cero.

EJEMPLO

Las estaturas (en cm) de los jugadores de dos equipos de baloncesto son:

EQUIPO A	180	165	170	173	162
EQUIPO B	168	173	171	169	169

Calcula el rango o recorrido y la desviación para cada uno de los equipos.

- Recorrido = mayor valor de la variable − menor valor de la variable

  Equipo A: Recorrido $= 180 - 162 = 18$ cm

  Equipo B: Recorrido $= 173 - 168 = 5$ cm

  Se observa que las estaturas de los jugadores del equipo A están más dispersas que las del equipo B, ya que la diferencia entre el valor mayor y el menor es mayor en el equipo A.

- Desviación respecto a la media = valor de la variable − media

  Equipo A: Media $= (180 + 165 + 170 + 173 + 162)/5 = 170$ cm

  $180 - 170 = 10$ cm $165 - 170 = -5$ cm

  $170 - 170 = 0$ cm $173 - 170 = 3$ cm $162 - 170 = -8$ cm

  Equipo B: Media $= (168 + 173 + 171 + 169 + 169)/5 = 170$ cm

  $168 - 170 = -2$ cm $173 - 170 = 3$ cm

  $171 - 170 = 1$ cm $169 - 170 = -1$ cm $169 - 170 = -1$ cm

  Observamos que la suma de las desviaciones es siempre cero:

  Equipo A: $10 + (-5) + 0 + 3 + (-8) = 0$

  Equipo B: $(-2) + 3 + 1 + (-1) + (-1) = 0$

1 **En un examen de Matemáticas se han obtenido las siguientes notas.**

3, 5, 7, 2, 9, 5, 3

Obtén el recorrido y la desviación.

220768 _ 0382-0419.indd 408 27/05/10 16:42

2 **Las edades de los alumnos de una clase vienen dadas por la siguiente tabla. Obtén el rango y la desviación.**

EDAD (x_i)	f_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})$
13	6			
14	7			
15	4			
16	3			
Suma				

3 **Calcula el recorrido y la desviación de los datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})$
[0, 4)		3			
[4, 8)		10			
[8, 12)		5			
[12, 16]		2			
Suma					

4 **Comprueba, para los pesos de 20 alumnos, que la suma de las desviaciones es cero.**

PESO	x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})$
[35, 41)		2		
[41, 47)		5		
[47, 53)		6		
[53, 59)		1		
[59, 65)		4		
[65, 71]		2		

CALCULAR E INTERPRETAR LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

DESVIACIÓN MEDIA, VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA

- **Desviación media (*DM*):** es la media de los valores absolutos de las desviaciones.
- **Varianza:** es la media de los valores absolutos de las desviaciones al cuadrado.
- **Desviación típica:** es la raíz cuadrada de la varianza. Se designa con la letra σ.

EJEMPLO

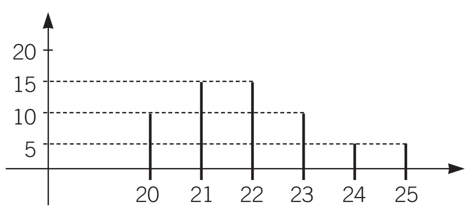
La tabla muestra los resultados obtenidos en un test de 120 preguntas. Halla la desviación media, la varianza y la desviación típica.

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
[0, 30)	15	12	180	$\lvert 15 - 52{,}35 \rvert = 36{,}73$	1349,02	$12 \cdot 1349{,}02 = 16726228{,}28$
[30, 60)	45	20	900	$\lvert 45 - 52{,}35 \rvert = 7{,}35$	54,02	$20 \cdot 54{,}02 = 1080{,}4$
[60, 90)	75	10	750	$\lvert 75 - 52{,}35 \rvert = 22{,}65$	513,02	$10 \cdot 513{,}02 = 5130{,}2$
[90, 120]	105	7	735	$\lvert 105 - 52{,}35 \rvert = 52{,}65$	2772,02	$7 \cdot 2772{,}02 = 19404{,}14$
	Suma	**49**	**2565**			**42.343,02**

$$\text{Desviación media} = \frac{36{,}73 \cdot 12 + 7{,}35 \cdot 20 + 22{,}65 \cdot 10 + 52{,}65 \cdot 7}{49} = 24{,}14$$

$$\text{Varianza} = \frac{42\,343{,}20}{49} = 864{,}14 \qquad \text{Desviación típica} = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{864{,}14} = 29{,}4$$

5 **Calcula las medidas de centralización y las medidas de dispersión.**



x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
20							
21							
22							
23							
24							
25							
Suma							

Media $= \bar{x} =$

Mediana $=$ *Me* $=$

Moda $=$ *Mo* $=$

Rango $=$

Desviación media $=$

Varianza $=$

Desviación típica $= \sigma =$

6 **La basura (en kg) producida por cada habitante al año en 10 países europeos es la que muestra la siguiente tabla.**

PAÍS	BASURA (kg)
Alemania	337
Bélgica	313
España	214
Francia	288
Gran Bretaña	282
Italia	246
Noruega	415
Países Bajos	381
Suecia	300
Suiza	336

a) Calcula la media de basura producida por cada habitante en estos países.

b) ¿Cuánto vale la mediana de los datos?

c) ¿Cuál es el recorrido de la distribución?

d) Completa la tabla.

PAÍS	BASURA (kg)	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
Alemania	337		
Bélgica	313		
España	214		
Francia	288		
Gran Bretaña	282		
Italia	246		
Noruega	415		
Países Bajos	381		
Suecia	300		
Suiza	336		
Total			

e) ¿Cuánto suman las desviaciones respecto de la media?

f) ¿Cuánto vale la varianza?

g) ¿Y cuánto vale la desviación típica?

ADAPTACIÓN CURRICULAR

7 **En el Mundial de Fútbol del año 2006 los jugadores españoles seleccionados tenían las siguientes edades.**

Reina, 23 años	**Capdevila, 28 años**	**Albelda, 28 años**
Íker Casillas, 25 años	**Michel Salgado, 30 años**	**Senna, 29 años**
Cañizares, 36 años	**Sergio Ramos, 20 años**	**Joaquín, 24 años**
Antonio López, 24 años	**Marchena, 26 años**	**Reyes, 22 años**
Pablo Ibáñez, 24 años	**Cesc, 19 años**	**Fernando Torres, 22 años**
Pernía, 29 años	**Iniesta, 22 años**	**Luis García, 27 años**
Puyol, 28 años	**Xavi, 26 años**	**Raúl, 28 años**
Juanito, 29 años	**Xabi Alonso, 24 años**	**Villa, 24 años**

Completa la tabla y calcula.

EDADES (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	$f_i \cdot x_i$	FRECUENCIA ACUMULADA (F_i)	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
Total						

a) La media de edades en 2006.

b) La mediana en 2006.

c) La moda en 2006.

d) El recorrido en 2006.

e) La desviación típica en 2006.

f) La media de edades actuales.

g) La mediana actual.

h) La moda actual.

i) El recorrido actual.